

Percolation dans le plan : dynamiques, pavages aléatoires et lignes nodales

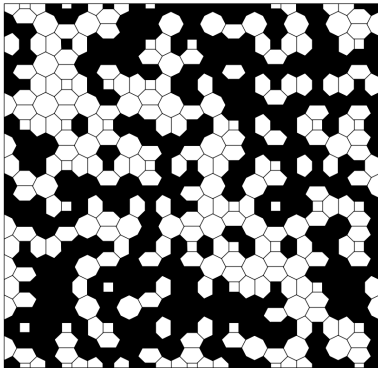
Hugo Vanneuville

Thèse préparée sous la direction de Christophe Garban

28 novembre 2018

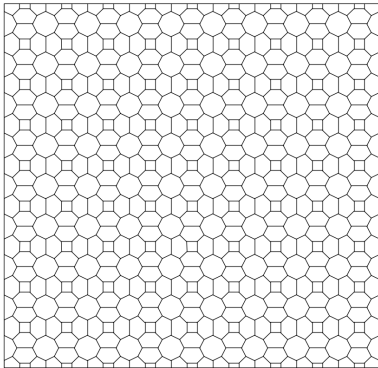
Percolation planaire

Un premier modèle : la percolation de Bernoulli



Percolation planaire

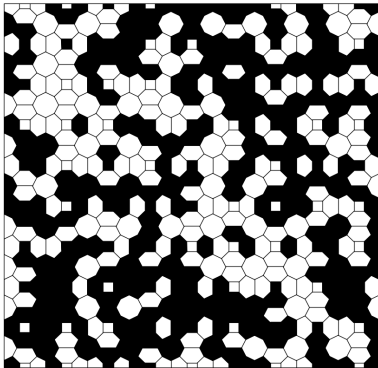
Un premier modèle : la percolation de Bernoulli



$$p \in [0, 1]$$

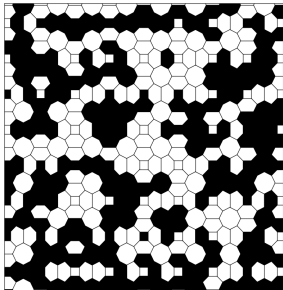
Percolation planaire

Un premier modèle : la percolation de Bernoulli

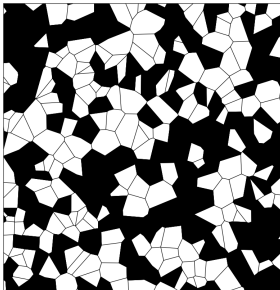


p = probabilité qu'une case soit noire

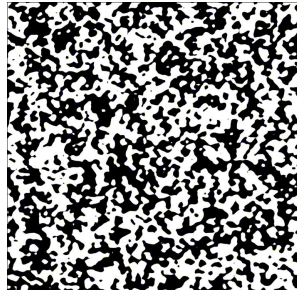
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



Percolation de
Voronoi



Percolation de
Bargmann-Fock

p = probabilité qu'un point donné soit noir

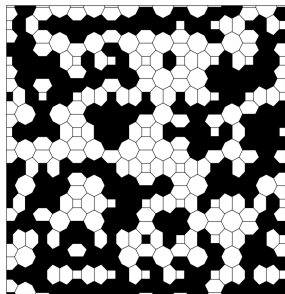
I. Transitions de phase

II. Universalité

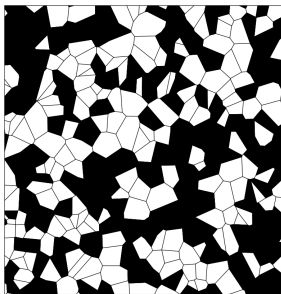
III. Dynamiques

I. Transitions de phase

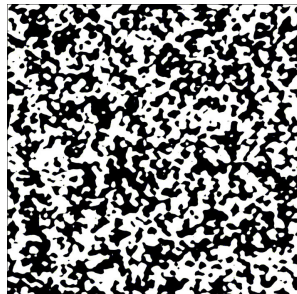
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



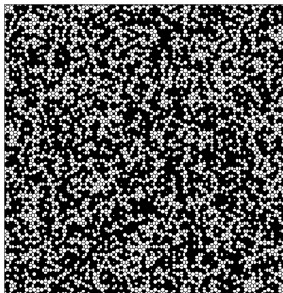
Percolation de
Voronoi



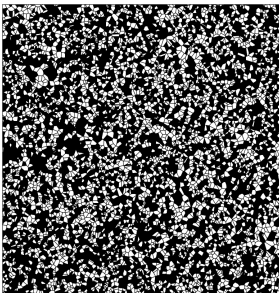
Percolation de
Bargmann-Fock

p = probabilité qu'un point donné soit noir

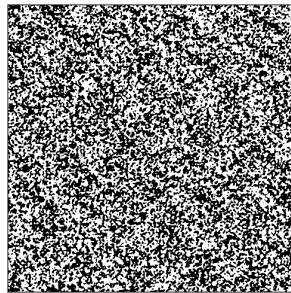
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



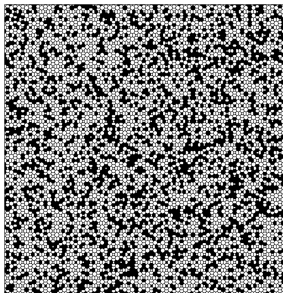
Percolation de
Voronoi



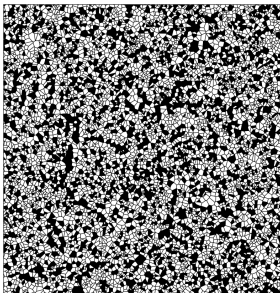
Percolation de
Bargmann-Fock

$p =$ probabilité qu'un point donné soit noir

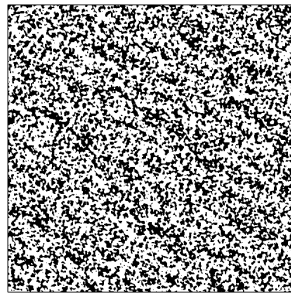
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



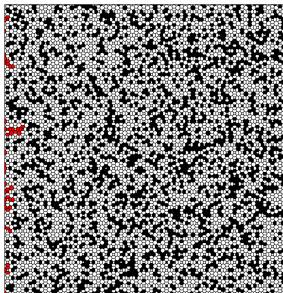
Percolation de
Voronoi



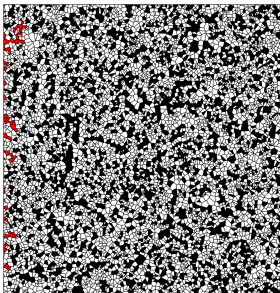
Percolation de
Bargmann-Fock

$$p = 0.3$$

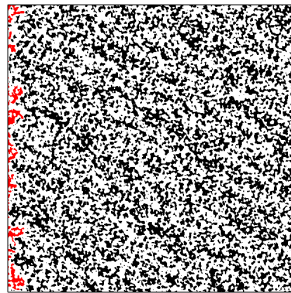
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



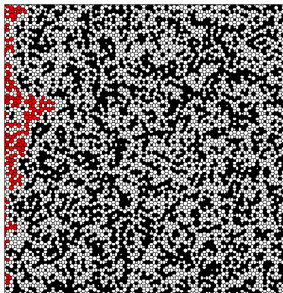
Percolation de
Voronoi



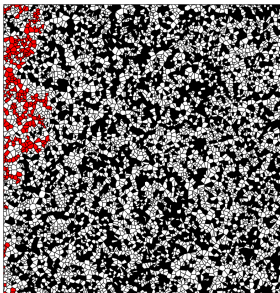
Percolation de
Bargmann-Fock

$$p = 0.3$$

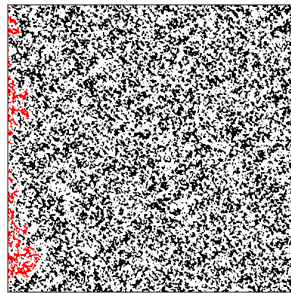
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



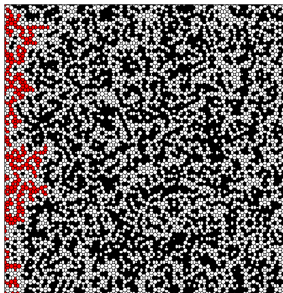
Percolation de
Voronoi



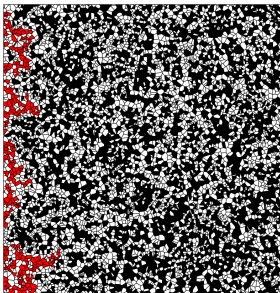
Percolation de
Bargmann-Fock

$$p = 0.4$$

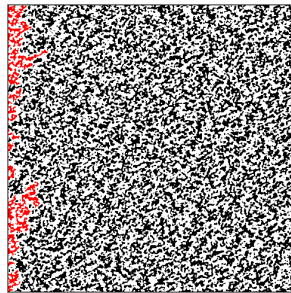
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



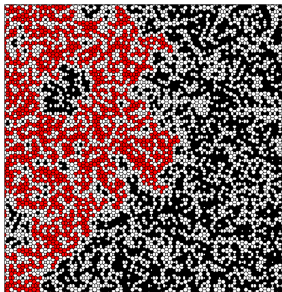
Percolation de
Voronoi



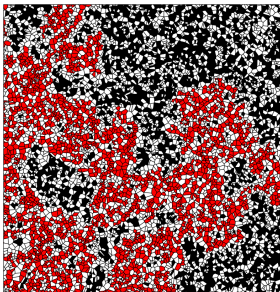
Percolation de
Bargmann-Fock

$$p = 0.45$$

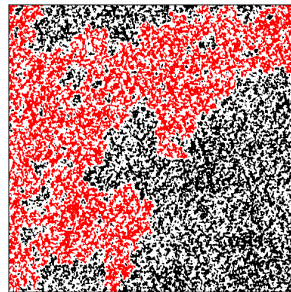
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



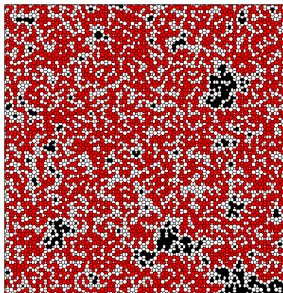
Percolation de
Voronoi



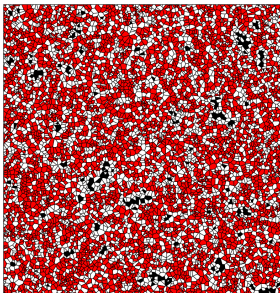
Percolation de
Bargmann-Fock

$$p = 0.5$$

Percolation planaire

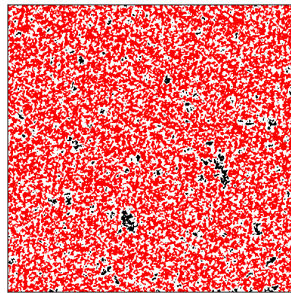


Percolation de
Bernoulli



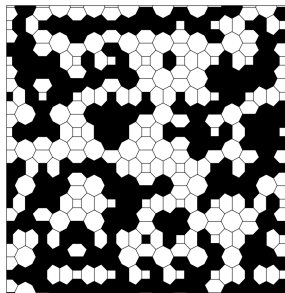
Percolation de
Voronoi

$$p = 0.55$$

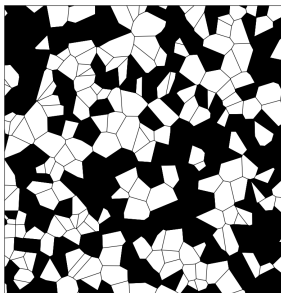


Percolation de
Bargmann-Fock

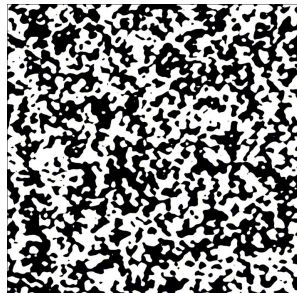
Percolation planaire



Percolation de
Bernoulli



Percolation de
Voronoi



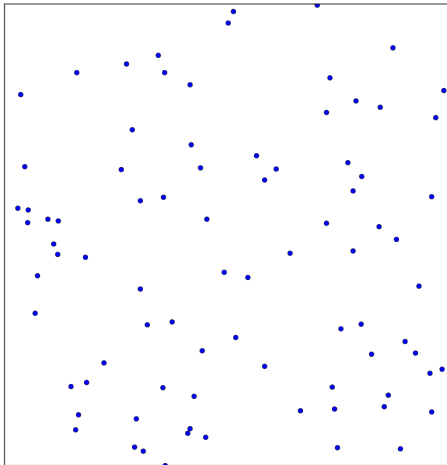
Percolation de
Bargmann-Fock

p = probabilité qu'un point donné soit noir

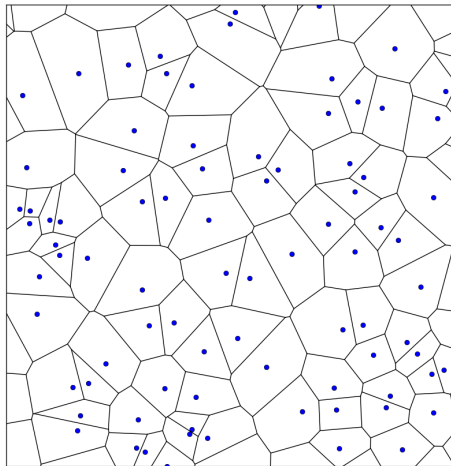
Théorème (Kesten, 80 ; Bollobás-Riordan, 06 ; Rivera-V, 17)

$$\mathbb{P}_p \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{cases} \leq \exp(-c(p)n) \text{ si } p < 1/2 \\ \geq 1 - \exp(-c(p)n) \text{ si } p > 1/2 \end{cases}$$

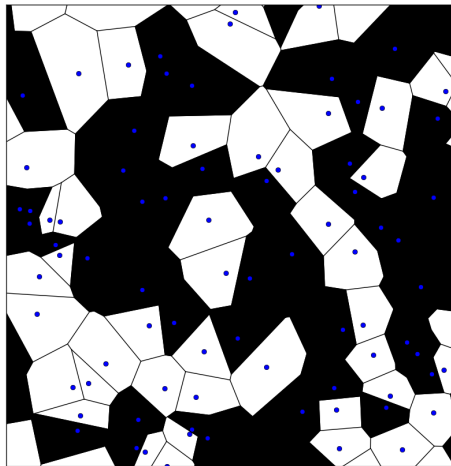
Percolation de Voronoi

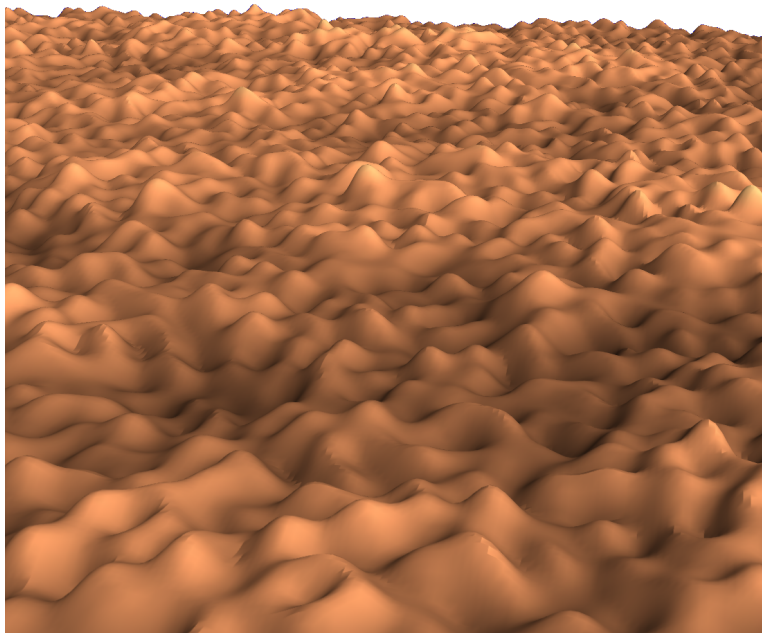


Percolation de Voronoi



Percolation de Voronoi





Le champ de Bargmann-Fock est une fonction aléatoire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Trois définitions équivalentes :

- $(f(x))_{x \in \mathbb{R}^2}$ est un champ gaussien centré, $\mathbb{E}[f(x)f(y)] = e^{-\frac{|x-y|^2}{2}}$
- $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{i,j} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}}$ où les $a_{i,j}$ sont indépendants $\sim \mathcal{N}(0,1)$
- $f = q \star W$ où W est un bruit blanc planaire et $q(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

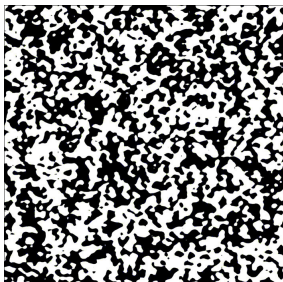
Le champ de Bargmann-Fock est une fonction aléatoire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Trois définitions équivalentes :

- $(f(x))_{x \in \mathbb{R}^2}$ est un champ gaussien centré, $\mathbb{E}[f(x)f(y)] = e^{-\frac{|x-y|^2}{2}}$
- $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{i,j} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}}$ où les $a_{i,j}$ sont indépendants $\sim \mathcal{N}(0,1)$
- $f = q \star W$ où W est un bruit blanc planaire et $q(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On colorie $\{f > \ell\}$ en noir et $\{f < \ell\}$ en blanc.

$$p = 1/2 \leftrightarrow \ell = 0$$



Théorème (Russo–Seymour–Welsh, 78 ; Tassion, 16 ; Beffara-Gayet, 17)

Soit $\rho > 0$.

• S'il existe $c \in]0, 1[$ telle que $\mathbb{P}_\rho \left[\boxed{n \atop \text{U}} \right] \in [c, 1 - c]$ alors il existe

$c'(\rho) \in]0, 1[$ telle que $\mathbb{P}_\rho \left[\boxed{n \atop \rho n} \right] \in [c'(\rho), 1 - c'(\rho)]$.

• Si $\mathbb{P}_\rho \left[\boxed{n \atop \text{U}} \right]$ tend vers 0 (resp. vers 1) alors $\mathbb{P}_\rho \left[\boxed{n \atop \rho n} \right]$ aussi.

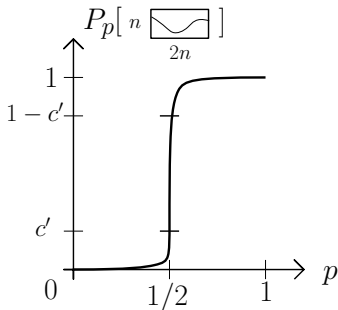
Théorème (Russo–Seymour–Welsh, 78 ; Tassion, 16 ; Beffara-Gayet, 17)

Soit $\rho > 0$.

• S'il existe $c \in]0, 1[$ telle que $\mathbb{P}_p \left[n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \in [c, 1 - c]$ alors il existe

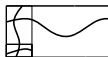
$c'(\rho) \in]0, 1[$ telle que $\mathbb{P}_p \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \in [c'(\rho), 1 - c'(\rho)]$.

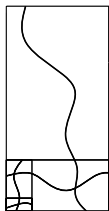
• Si $\mathbb{P}_p \left[n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right]$ tend vers 0 (resp. vers 1) alors $\mathbb{P}_p \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right]$ aussi.

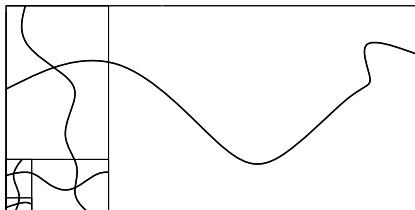


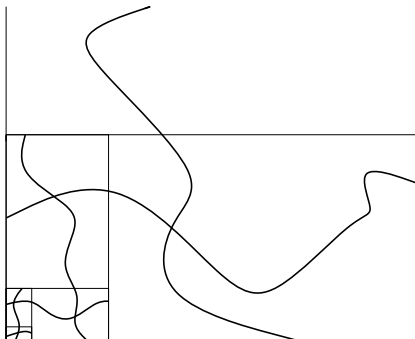


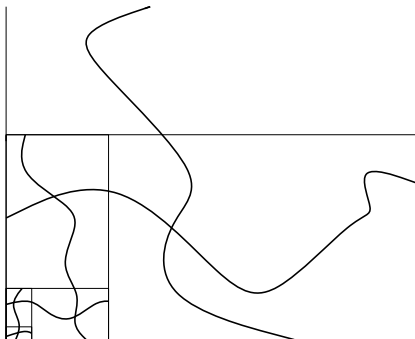






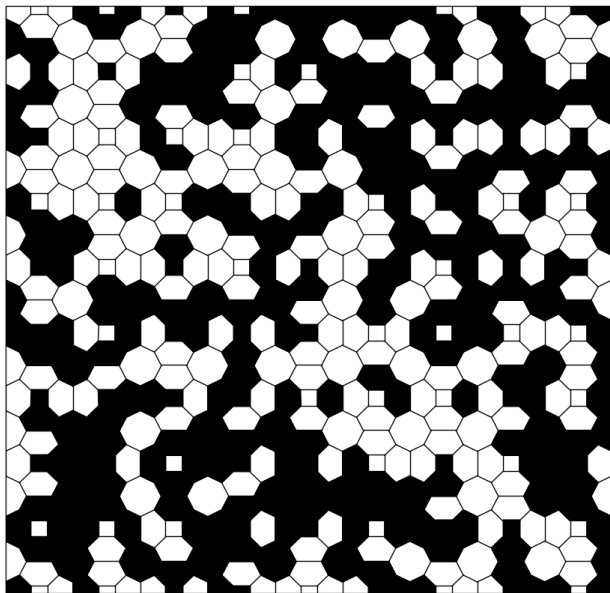






Théorème

- (*Harris, 60 ; Zvavith, 96 ; Alexander, 96*) Si $p \leq 1/2$ alors presque sûrement toutes les composantes connexes noires sont bornées.
- (*Kesten, 80 ; Bollobás-Riordan, 06 ; Rivera-V, 17*) Si $p > 1/2$ alors presque sûrement il existe une composante connexe noire non bornée.



Cas de la percolation de Bernoulli :

$$\begin{array}{c} \square \\ \text{\scriptsize n} \end{array} \subset \{-1, 1\}^{m_n} \text{ où } m_n = \text{Card}\{\text{Cases qui intersectent } \begin{array}{c} \square \\ \text{\scriptsize n} \end{array} \}$$

Cas de la percolation de Bernoulli :

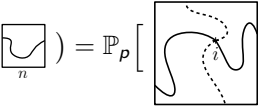
$$\begin{array}{c} \square \\ \text{\scriptsize } n \end{array} \subset \{-1, 1\}^{m_n} \text{ où } m_n = \text{Card}\{\text{Cases qui intersectent } \begin{array}{c} \square \\ \text{\scriptsize } n \end{array}\}$$

Idée (Russo, 82) : On a une transition de phase pour une suite d'événements croissants $A_n \subset \{-1, 1\}^{m_n}$ si les événements dépendent très peu de chaque coordonnée.

Comme traduire le fait que $A_n \subset \{-1, 1\}^{m_n}$ dépend très peu de chaque coordonnée ?

Une première stratégie :

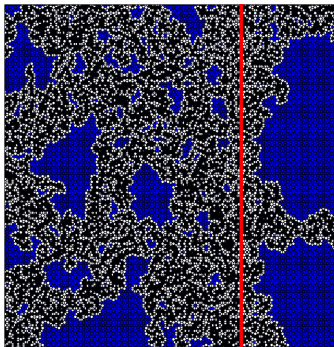
$$\text{Influence}_i^P(A_n) := \mathbb{P}_P [\text{Changer la coordonnée } i \text{ modifie } \mathbb{1}_{A_n}]$$

$$\text{Influence}_i^P \left(\underbrace{\square}_{n} \right) = \mathbb{P}_P \left[\underbrace{\square}_{i} \right]$$


Comme traduire le fait que $A_n \subset \{-1, 1\}^{m_n}$ dépend très peu de chaque coordonnée ?

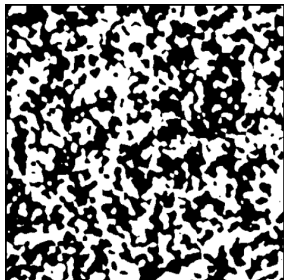
Une seconde stratégie :

Algorithmes aléatoires de décision (O'Donnell-Saks-Schramm-Servedio, 05 ;
Duminil-Copin-Raoufi-Tassion, 17)

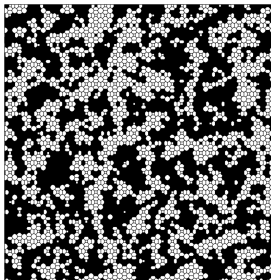


Comment adapter ces techniques à la percolation de champs gaussiens continus ?

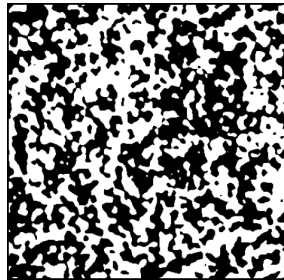
Discretisation



$$f = q \star W$$



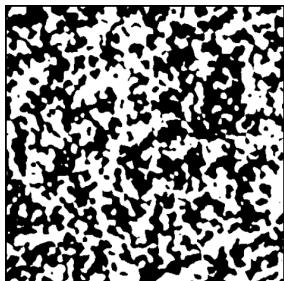
1^{ère} discrétisation :
 f restreinte
à un pavage
(avec **A. Rivera**)



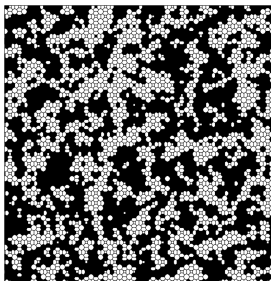
2^{ème} discrétisation :
 $f^\varepsilon = q \star W^\varepsilon$
(avec **S. Muirhead**)

Comment adapter ces techniques à la percolation de champs gaussiens continus ?

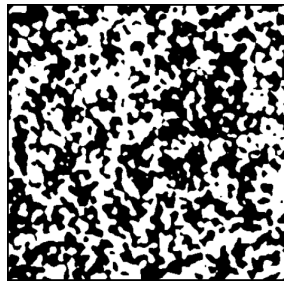
Discrétisation



$$f = q \star W$$



1^{ère} discrétisation :
 f restreinte
à un pavage
(avec **A. Rivera**)

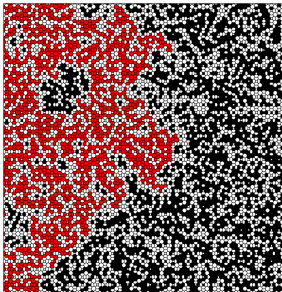


2^{ème} discrétisation :
 $f^\varepsilon = q \star W^\varepsilon$
(avec **S. Muirhead**)

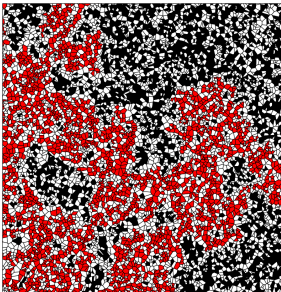
Théorème (Muirhead-V, 18)

Le théorème de transition de phase est toujours vraie si on remplace q par une fonction q_α positive, suffisamment lisse, symétrique, telle que $q_\alpha(x) = O(|x|^{-\alpha})$ pour un certain $\alpha > 2$.

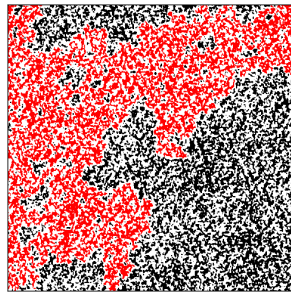
II. Universalité



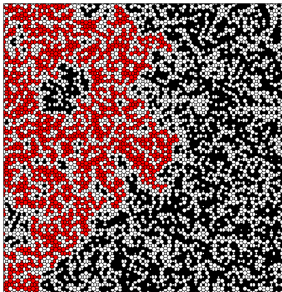
Percolation de
Bernoulli



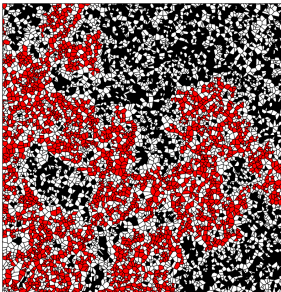
Percolation de
Voronoi



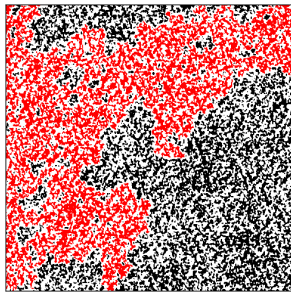
Percolation de
Bargmann-Fock



Percolation de
Bernoulli



Percolation de
Voronoi



Percolation de
Bargmann-Fock

Conjecture

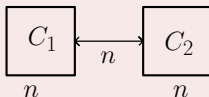
Ces modèles admettent une même limite d'échelle.

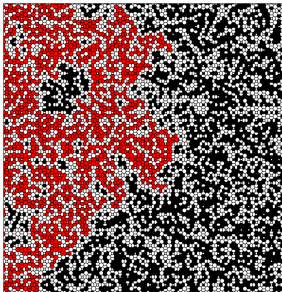
Théorème (Beffara-Gayet, 17 ; Beliaev-Muirhead, 17 ; Rivera-V, 17 ; Muirhead-V, 18)

La percolation de Bargmann-Fock est quasi-indépendante dans le sens que pour tout $p \in [0, 1]$:

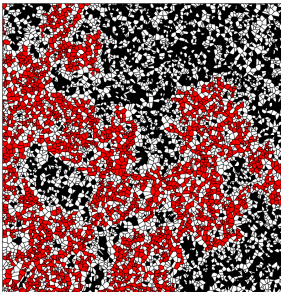
$$\mathbb{P}_p \left[\boxed{\text{wavy line}}_{C_1} \cap \boxed{\text{wavy line}}_{C_2} \right] - \mathbb{P}_p \left[\boxed{\text{wavy line}}_{C_1} \right] \mathbb{P}_p \left[\boxed{\text{wavy line}}_{C_2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

où :

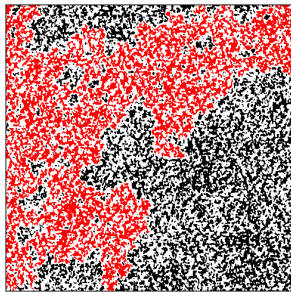




Percolation de
Bernoulli



Percolation de
Voronoi



Percolation de
Bargmann-Fock

Conjecture

Ces modèles admettent une même limite d'échelle.

Les exposants critiques

$$\mathbb{P}_{1/2} \left[n \begin{array}{c} \boxed{\text{diagram}} \\ n \end{array} \right] \simeq n^{-\zeta_1} \text{ avec } \zeta_1 = 5/48$$

$$\mathbb{P}_{1/2} \left[n \begin{array}{c} \boxed{\text{diagram}} \\ n \end{array} \right] \simeq n^{-\zeta_4} \text{ avec } \zeta_4 = 5/4$$

$$\text{Si } p > 1/2, \mathbb{P}_p \left[\begin{array}{c} \infty \\ \text{diagram} \end{array} \right] \simeq (p - 1/2)^\beta \text{ avec } \beta = 5/36$$

Les exposants critiques

$$\mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} \boxed{\text{diagram}} \\ n \end{array} \right] \simeq n^{-\zeta_1} \text{ avec } \zeta_1 = 5/48$$

$$\mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} \boxed{\text{diagram}} \\ n \end{array} \right] \simeq n^{-\zeta_4} \text{ avec } \zeta_4 = 5/4$$

$$\text{Si } p > 1/2, \mathbb{P}_p \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \infty \end{array} \right] \simeq (p - 1/2)^\beta \text{ avec } \beta = 5/36$$

Théorème (Lawler-Schramm-Werner, 02 ; Smirnov-Werner, 01)

Ces résultats sont vrais pour la percolation de Bernoulli sur le pavage hexagonal.

Les exposants critiques

$$\mathbb{P}_{1/2} \left[n \begin{array}{c} \boxed{\text{diagram}} \\ n \end{array} \right] \simeq n^{-\zeta_1} \text{ avec } \zeta_1 = 5/48$$

$$\mathbb{P}_{1/2} \left[n \begin{array}{c} \boxed{\text{diagram}} \\ n \end{array} \right] \simeq n^{-\zeta_4} \text{ avec } \zeta_4 = 5/4$$

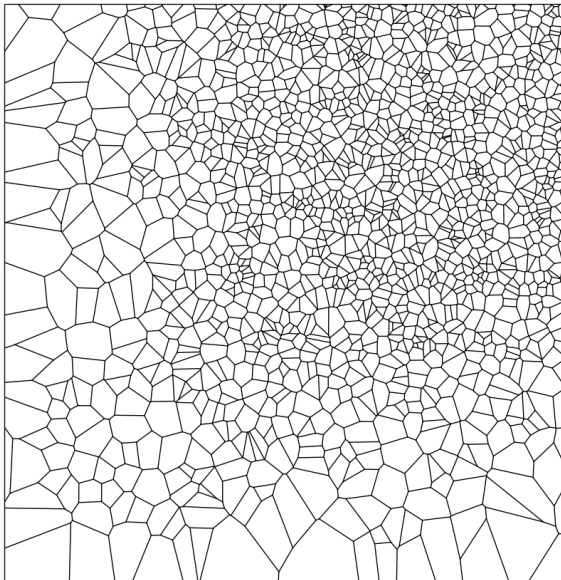
$$\text{Si } p > 1/2, \mathbb{P}_p \left[\begin{array}{c} \infty \\ \text{diagram} \end{array} \right] \simeq (p - 1/2)^\beta \text{ avec } \beta = 5/36$$

Théorème (Lawler-Schramm-Werner, 02 ; Smirnov-Werner, 01)

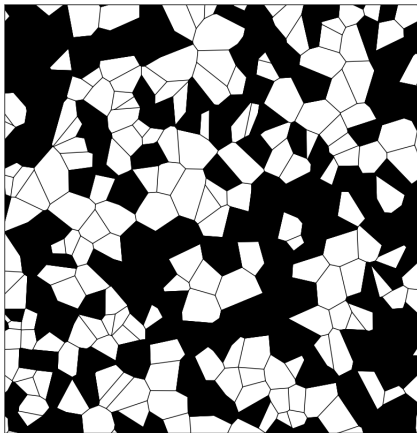
Ces résultats sont vrais pour la percolation de Bernoulli sur le pavage hexagonal.

Théorème

- (*Kesten, 87 pour Bernoulli ; V, 18 pour Voronoi*) $\beta = \frac{\zeta_1}{2 - \zeta_4}$
- (*Kesten-Zhang, 87 pour Bernoulli ; V, 18 pour Voronoi*) $\beta < 1$



Universalité en percolation de Voronoi



$$\text{Probabilité quenched} = \mathbb{P} \left[\cdot \mid \text{Pavage} \right]$$

Théorème (Ahlberg-Griffiths-Morris-Tassion, 16)

$$\text{Var} \left(\mathbb{P}_{1/2} \left[n \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram} \\ \hline \end{array} \mid \text{Pavage} \right] \right) \leq n^{-\varepsilon}$$

ρn

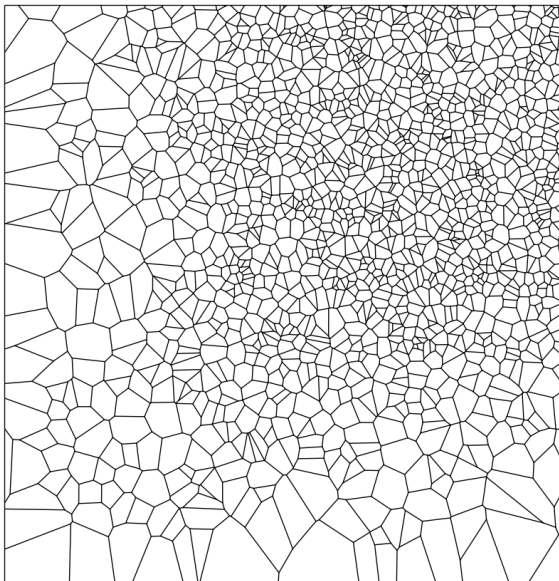
Théorème (Ahlberg-Griffiths-Morris-Tassion, 16)

$$\text{Var} \left(\mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} n \\ \text{Diagram} \\ \rho n \end{array} \mid \text{Pavage} \right] \right) \leq n^{-\varepsilon}$$

Théorème (V, 18)

$$\text{Var} \left(\mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m \\ n \end{array} \mid \text{Pavage} \right] \right) \leq m^{-\varepsilon} \mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m \\ n \end{array} \right]^2$$

$$\text{Var} \left(\mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m \\ n \end{array} \mid \text{Pavage} \right] \right) \leq m^{-\varepsilon} \mathbb{P}_{1/2} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m \\ n \end{array} \right]^2$$



III. Dynamiques

Percolation de Bernoulli dynamique (Häggström-Peres-Steif, 97)

Percolation de Bernoulli dynamique (Häggström-Peres-Steif, 97)

Théorème (Benjamini-Kalai-Schramm, 99)

Soit $\omega(t)$ la configuration de percolation dynamique au temps t . Pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\omega(0), \omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] - \mathbb{P}\left[\omega(0) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \mathbb{P}\left[\omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Percolation de Bernoulli dynamique (Häggström-Peres-Steif, 97)

Théorème (Benjamini-Kalai-Schramm, 99)

Soit $\omega(t)$ la configuration de percolation dynamique au temps t . Pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\omega(0), \omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] - \mathbb{P}\left[\omega(0) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \mathbb{P}\left[\omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

dynamique.mp4

Percolation de Bernoulli dynamique (Häggström-Peres-Steif, 97)

Théorème (Benjamini-Kalai-Schramm, 99)

Soit $\omega(t)$ la configuration de percolation dynamique au temps t . Pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\omega(0), \omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] - \mathbb{P}\left[\omega(0) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \mathbb{P}\left[\omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Conjecture (Benjamini-Kalai-Schramm, 99)

Presque sûrement il existe des temps exceptionnels auxquels il y a une composante connexe noire non bornée.

Percolation de Bernoulli dynamique (Häggström-Peres-Steif, 97)

Théorème (Benjamini-Kalai-Schramm, 99)

Soit $\omega(t)$ la configuration de percolation dynamique au temps t . Pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\omega(0), \omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] - \mathbb{P}\left[\omega(0) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \mathbb{P}\left[\omega(t) \in n \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème (Schramm-Steif, 08 ; Garban-Pete-Schramm, 10)

Presque sûrement il existe des temps exceptionnels auxquels il y a une composante connexe noire non bornée.

$$f_n := \mathbb{1}_{\square_n} : \{-1, 1\}^{m_n} \rightarrow \{0, 1\}$$


On projette f_n sur la base de Fourier de $L^2(\{-1, 1\}^{m_n}, \mathbb{P}_{1/2})$

$$f_n = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, m_n\}} \widehat{f_n}(S) \chi_S \text{ où } \chi_S : \omega \in \{-1, 1\}^{m_n} \mapsto \prod_{i \in S} \omega_i.$$

La base de Fourier diagonalise la dynamique :

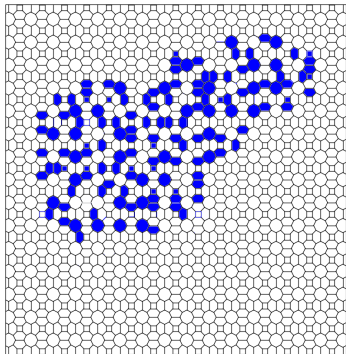
$$\mathbb{E} [\chi_S(\omega(0)) \chi_{S'}(\omega(t))] = e^{-t|S|} \mathbb{1}_{S=S'}.$$

Stratégie : montrer quantitativement que les coefficients de Fourier sont concentrés sur les hautes fréquences.

Garban-Pete-Schramm, 10 :

L'échantillon spectral de f_n est une variable aléatoire $\mathcal{S}_{f_n}$ à valeurs dans les sous-ensembles de $\{1, \dots, m_n\}$ telle que :

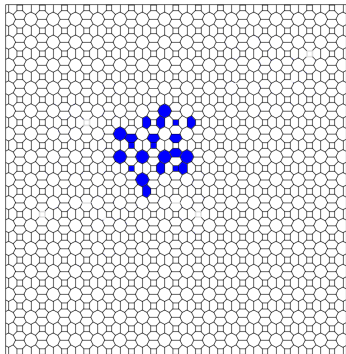
$$\mathbb{P}[\mathcal{S}_{f_n} = S] \propto \widehat{f_n}(S)^2.$$



Garban-Pete-Schramm, 10 :

L'échantillon spectral de f_n est une variable aléatoire $\mathcal{S}_{f_n}$ à valeurs dans les sous-ensembles de $\{1, \dots, m_n\}$ telle que :

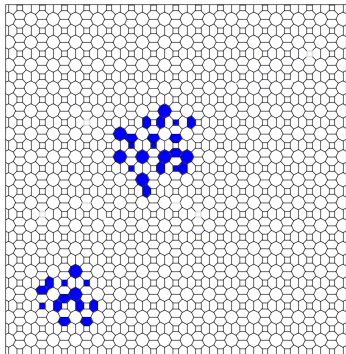
$$\mathbb{P}[\mathcal{S}_{f_n} = S] \propto \widehat{f_n}(S)^2.$$



Garban-Pete-Schramm, 10 :

L'échantillon spectral de f_n est une variable aléatoire $\mathcal{S}_{f_n}$ à valeurs dans les sous-ensembles de $\{1, \dots, m_n\}$ telle que :

$$\mathbb{P}[\mathcal{S}_{f_n} = S] \propto \widehat{f_n}(S)^2.$$



Percolation dynamique de Bernoulli conservative ([Broman-Garban-Steif, 13](#))

`dynamique_conservative.mp4`

Percolation dynamique de Bernoulli conservative (Broman-Garban-Steif, 13)

Théorème (Garban-V, 16)

Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que, si l'horloge entre x et y a un taux supérieur à $|x - y|^{-(2+\alpha_0)}$ alors il existe des temps exceptionnels avec une composante connexe noire non bornée.

Percolation dynamique de Bernoulli conservative (Broman-Garban-Steif, 13)

Théorème (Garban-V, 16)

Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que, si l'horloge entre x et y a un taux supérieur à $|x - y|^{-(2+\alpha_0)}$ alors il existe des temps exceptionnels avec une composante connexe noire non bornée.

La base de Fourier ne diagonalise pas cette dynamique.

La base de diagonalisation est implicite.

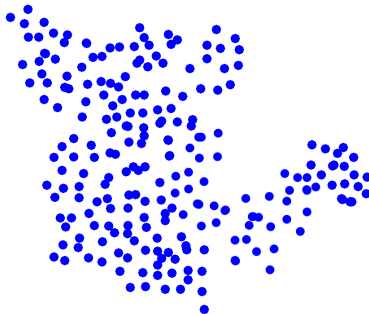
Percolation de Voronoi dynamique

Percolation de Voronoi dynamique

Théorème (V, 18)

Si les couleurs évoluent à taux 1 et/ou si les points évoluent selon des processus de Lévy à longue portée, alors il existe des temps exceptionnels avec une composante connexe noire non bornée.

Échantillon spectral continu



Merci pour votre attention !